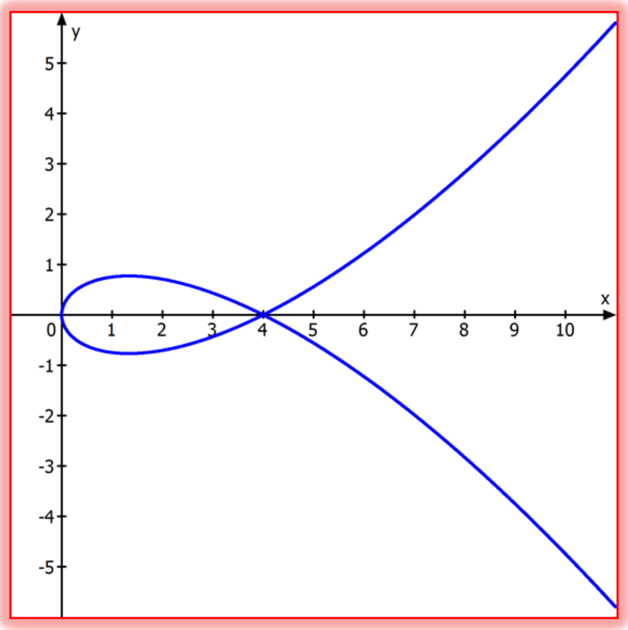


Parabola nodata

Knotenparabel

Text Nr. 54105

11. Mai 2016

Friedrich W. Buckel

Internetbibliothek für Schulmathematik

www.mathe-cd.de

Vorwort

In der Analysis der Oberstufe begegnet man bei den Wurzelfunktionen auch dieser Funktion:

$$y = \pm\tfrac{1}{4}\sqrt{x}\cdot(4-x)$$

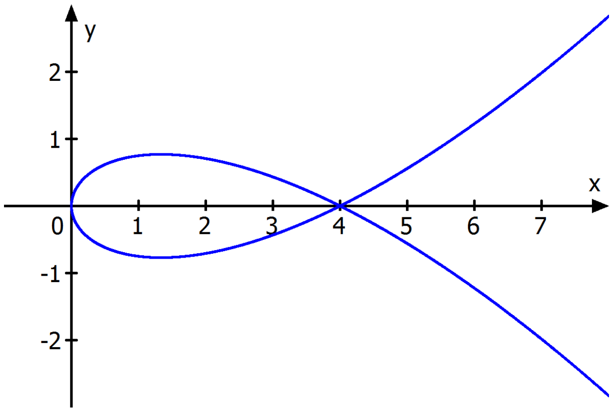
Die zugehörige Kurve heißt Knotenparabel oder „Parabola nodata“.

Sie hat eine einfache Parameterdarstellung und ist ein gutes Übungsobjekt.

Die verwendeten Methoden findet man im Text 54011 Differentialgeometrie.

Inhalt

1 Vorschau



Parametergleichung: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t - \frac{1}{4}t^3 \end{pmatrix}$ für $t \in \mathbb{R}$.

bzw. $x(t) = t^2$ und $y(t) = t - \frac{1}{4}t^3$

Koordinatengleichung: $y^2 = \frac{1}{16}x(4-x)^2$

bzw. $x^3 - 8x^2 + 16x - 16y^2 = 0$ (algebraische Kurve 3. Grades).

Ersatzfunktionen: $y = \pm\frac{1}{4}\sqrt{x}\cdot(4-x)$

2 Details zu den Gleichungen

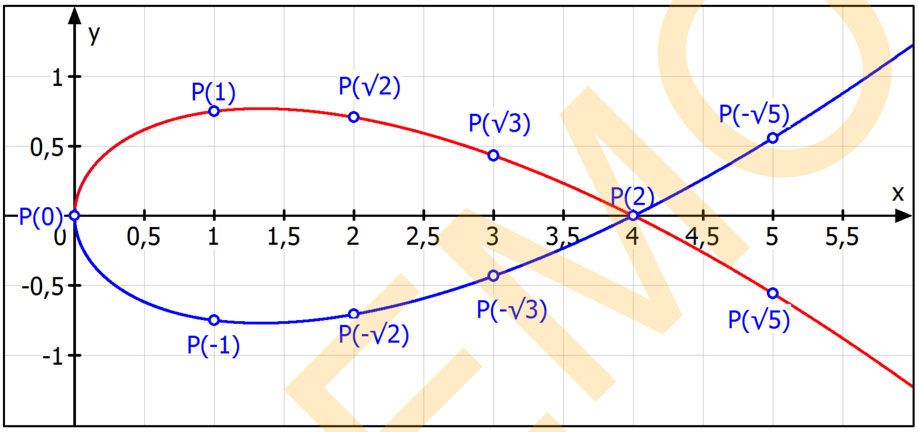
Als Parabola nodata versteht man diese Kurve:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t - \frac{1}{4}t^3 \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Define $vx(t)=\left[t^2 \quad t-\frac{t^3}{4}\right]$	Fertig
$vx(0)$	$[0. \quad 0.]$
$vx(1)$	$[1. \quad 0.75]$
$vx(\sqrt{2})$	$[2. \quad 0.707107]$
$vx(\sqrt{3})$	$[3. \quad 0.433013]$
$vx(2)$	$[4. \quad 0.]$
$vx(\sqrt{5})$	$[5. \quad ^-0.559017]$
$vx(-\sqrt{5})$	$[5. \quad 0.559017]$

Ich habe mit meinem CAS-Rechner TI Nspire für diese Funktion einige Werte berechnen lassen.
Die Schreibweise vx soll „Vektor x“, also $\vec{x}$ bedeuten.
Die beiden Koordinaten habe ich aus Platzgründen nebeneinander angeordnet.

In der Abbildung steht hinter dem Buchstaben P in Klammern der jeweilige Parameterwert.



Algebraische Gleichung mit kartesischen Koordinaten:

Aus $x = t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \pm\sqrt{x}$.

Setzt man das in $y = t - \frac{1}{4}t^3 = \frac{1}{4}t\left(4 - t^2\right)$ ein, erhält man für den einen Kurvenbogen (mit den positiven t-Werten) diese Kurvengleichungen (2 Teilfunktionen):

$$y = \pm\sqrt{x} \mp \frac{1}{4}x\sqrt{x} \quad \text{oder} \quad y = \pm\frac{1}{4}\sqrt{x}\cdot(4-x)$$

Quadriert man, erhält man eine Gleichung für die ganze Kurve: $y^2 = \frac{1}{16}x(4-x)^2$

3 Einige Eigenschaften der Knotenparabel

a) Schnittpunkte mit der x-Achse: y = 0 führt zu $\sqrt{x}\cdot(4-x)=0$, also x = 0 und x = 4.

b) Symmetrieverhalten: $\vec{x}(-t)=\begin{pmatrix}(-t)^2\\(-t)-\frac{1}{4}(-t)^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t^2\\-t+\frac{1}{4}t^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x(t)\\-y(t)\end{pmatrix}$

Deutung: Ersetzt man t durch –t, erhält man einen Kurvenpunkt mit derselben x-Koordinate aber der entgegengesetzten y-Koordinate.
Die Kurve ist also **symmetrisch zur x-Achse**.

c) Verhalten für große t:

$t\to\infty$: $x(t)=t^2\to\infty$, $y(t)=t-\frac{1}{4}t^3=t^3\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{4}\right)\to-\infty$

Mit dem Trick des Ausklammerns umgeht man die Situation "$\infty-\infty$":
Die Klammer strebt für $t\to\infty$ gegen $-\frac{1}{4}$.

$t\to-\infty$: $x(t)=t^2\to\infty$, $y(t)=t-\frac{1}{4}t^3=t^3\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{4}\right)\to+\infty$

d) Ableitungen

Nach t: $\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}t^2\\t-\frac{1}{4}t^3\end{pmatrix}\Rightarrow\dot{\vec{x}}(t)=\begin{pmatrix}2t\\1-\frac{3}{4}t^2\end{pmatrix}$ und $\ddot{\vec{x}}(t)=\begin{pmatrix}2\\-\frac{3}{2}t\end{pmatrix}$

Nach x: $y'(x)=\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}=\frac{1-\frac{3}{4}t^2}{2t}=\frac{4-3t^2}{8t}$

$$y''(x)=\frac{\dot{x}\cdot\ddot{y}-\ddot{x}\cdot\dot{y}}{\dot{x}^3}=\frac{2t\cdot\left(-\frac{3}{2}t\right)-2\cdot\left(1-\frac{3}{4}t^2\right)}{(2t)^3}=\frac{-3t^2-2+\frac{3}{2}t^2}{8t^3}=\frac{-\frac{3}{2}t^2-2}{8t^3}=-\frac{3t^2+4}{16t^3}$$

e) Tangenten:

Tangente in $P(1)=\left(1\,|\,\frac{3}{4}\right)$: $y'(1)=\frac{4-3}{8}=\frac{1}{8}$

$y-\frac{3}{4}=\frac{1}{8}(x-1)\quad\Leftrightarrow\quad y=\frac{1}{8}x+\frac{5}{8}$

Schnittwinkel bei x = 4. Tangentensteigung: $y'(t=2)=\frac{4-3\cdot4}{16}=\frac{-8}{16}=-\frac{1}{2}$

$\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\approx29{,}5^{\circ}$ (gegen die x-Achse). Der Winkel zwischen den beiden sich auf der x-Achse schneidenden Bögen ist dann $\gamma\approx59^{\circ}$.

Waagrechte Tangenten (Extrempunkte)

$\dot{y}(t)=0\quad\Leftrightarrow\quad1-\frac{3}{4}t^2=0\quad\Leftrightarrow\quad\frac{3}{4}t^2=1\quad\Leftrightarrow\quad t^2=\frac{4}{3}\quad\Leftrightarrow\quad t=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}\approx\pm1{,}15$

Oder über $y'(x)=0\quad\Leftrightarrow\quad4-3t^2=0\quad\Leftrightarrow\quad t=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}$

Kontrolle: $y''\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)=-\frac{3\cdot\frac{4}{3}+4}{16\cdot\frac{4}{3}\cdot\sqrt{\frac{4}{3}}}<0\quad\Rightarrow\quad$ Rechtskrümmung, also Hochpunkt.

$\vec{x}\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)\approx\begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\\sqrt{\frac{4}{3}}-\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}\cdot\sqrt{\frac{4}{3}}\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1{,}333\\0770\end{pmatrix}$ also $H(1{,}333\,|\,0{,}770)$

Wegen der Symmetrie zur x-Achse hat die Kurve den Tiefpunkt $T(1{,}333\,|\,-0{,}770)$.

Senkrechte Tangente: $\dot{x}(t)=0\quad\Leftrightarrow\quad2t=0\quad\Leftrightarrow\quad t=0\quad\Leftrightarrow\quad P(0)=(0\,|\,0)$
Also ist die y-Achse eine senkrechte Tangente.

f) **Die Kurve besitzt keinen Wendepunkt**, weil $y''(x) = -\dfrac{3t^2+4}{16t^3}$ keine Nullstelle hat.

g) **Länge des Kurvenbogens** zwischen dem Ursprung und dem Kreuzungspunkt $K(4\,|\,0)$:

$$s = \int_0^2 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt = \int_0^2 \sqrt{4t^2 + \left(1 - \tfrac{3}{4}t^2\right)^2}\,dt = \int_0^2 \sqrt{4t^2 + 1 - \tfrac{3}{2}t^2 + \tfrac{9}{16}t^4}\,dt = \int_0^2 \sqrt{\tfrac{9}{16}t^4 + \tfrac{5}{2}t^2 + 1}\,dt$$

Dieses Integral ist für die Schule zu schwer.

Es erfordert eine komplizierte Substitution.

Mit meinem CAS erhalte ich als Ergebnis:

$$\boxed{\int_0^2 \sqrt{\frac{9}{16}\cdot t^4 + \frac{5}{2}\cdot t^2 + 1}\,dt \qquad 4.49374}$$

h) **Fläche, die von der Schleife umschlossen wird**:

$$2\cdot\int_0^4 y(x)\,dx = 2\int_{t=0}^{t=2} y(t)\cdot\dot{x}(t)\,dt = 2\cdot\tfrac{1}{4}\int_{t=0}^{t=2}\left(4t - t^3\right)2t\,dt = \int_{t=0}^{t=2}\left(4t^2 - t^4\right)dt = \left[\tfrac{4}{3}t^3 - \tfrac{1}{5}t^5\right]_0^2$$

$$= \left[\tfrac{32}{3} - \tfrac{32}{5}\right] = 32\cdot\left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5}\right) = 32\cdot\tfrac{2}{15} = \tfrac{64}{15} \quad \text{(FE)}.$$

Der Faktor 2 hat seinen Grund in der x-Achsen-Symmetrie.